CHƯƠNG IV
GIỚI HẠN

I. Giới hạn của dãy số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}C=C$ ***2. Định lí :*** *a) Nếu* $\lim u_n=a$, $\lim v_n=b$ *thì* • $\lim(u_n+v_n)=a+b$ • $\lim(u_n-v_n)=a-b$ • $\lim(u_n.v_n)=a.b$ • $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$ *(nếu* $b\neq0$*)* *b) Nếu* $u_n\geq0$, $\forall n$ *và* $\lim u_n=a$ *thì* $a\geq0$ *và* $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ *c) Nếu* $\lvert u_n\rvert\leq v_n,\forall n$ *và* $\lim v_n=0$ *thì* $\lim u_n=0$ *d) Nếu* $\lim u_n=a$ *thì* $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$ ***3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn*** $S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}\quad(\lvert q\rvert<1)$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\sqrt{n}=+\infty$ $\lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n=+\infty\ (q>1)$ ***2. Định lí:*** *a) Nếu* $\lim\lvert u_n\rvert=+\infty$ *thì* $\lim\frac{1}{u_n}=0$ *b) Nếu* $\lim u_n=a$, $\lim v_n=\pm\infty$ *thì* $\lim\frac{u_n}{v_n}=0$ *c) Nếu* $\lim u_n=a\neq0$, $\lim v_n=0$ *thì* $\lim\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a.v_n>0\\-\infty & \text{nếu } a.v_n<0\end{cases}$ *d) Nếu* $\lim u_n=+\infty$, $\lim v_n=a$ *thì* $\lim(u_n.v_n)=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a>0\\-\infty & \text{nếu } a<0\end{cases}$ ** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

Một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số:

• ***Chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của n.***

VD: a) $\lim\frac{n+1}{2n+3}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}$ b) $\lim\frac{\sqrt{n^2+n}-3n}{1-2n}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-3}{\frac{1}{n}-2}=1$

c) $\lim(n^2-4n+1)=\lim n^2\left(1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty$

• ***Nhân lượng liên hợp****: Dùng các hằng đẳng thức*

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b;\qquad\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$$

VD: $\lim\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2-3n}+n\right)}=\lim\frac{-3n}{\sqrt{n^2-3n}+n}=-\frac{3}{2}$

• ***Dùng định lí kẹp***: *Nếu* $|u_n| \le v_n, \forall n$ *và* $\lim v_n = 0$ *thì* $\lim u_n = 0$

VD: *a) Tính* $\lim \frac{\sin n}{n}$. *Vì* $0 \le \left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{n}$ *và* $\lim \frac{1}{n} = 0$ *nên* $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$

b) Tính $\lim \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1}$. *Vì* $|3\sin n - 4\cos n| \le \sqrt{(3^2+4^2)(\sin^2 n + \cos^2 n)} = 5$

nên $0 \le \left|\frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1}\right| \le \frac{5}{2n^2+1}$.

Mà $\lim \frac{5}{2n^2+1} = 0$ *nên* $\lim \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1} = 0$

Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:

• *Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.*

• *Nếu bậc của từ bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của luỹ thừa cao nhất của tử và của mẫu.*

• *Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là* $+\infty$ *nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là* $-\infty$ *nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu.*

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n^2-n+3}{3n^2+2n+1}$ b) $\lim \frac{2n+1}{n^3+4n^2+3}$ c) $\lim \frac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}$

d) $\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$ e) $\lim \frac{n^2+1}{2n^4+n+1}$ f) $\lim \frac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}$

Bài 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{1+3^n}{4+3^n}$ b) $\lim \frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ c) $\lim \frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$

d) $\lim \frac{2^n+5^{n+1}}{1+5^n}$ e) $\lim \frac{1+2.3^n-7^n}{5^n+2.7^n}$ f) $\lim \frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$

Bài 3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$ b) $\lim \frac{\sqrt{n^2+3}-n-4}{\sqrt{n^2+2}+n}$ c) $\lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

d) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$ e) $\lim \frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)}$ f) $\lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$

Bài 4: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\ ...\ +\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ b) $\lim \left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\ ...\ +\frac{1}{n(n+2)}\right)$

c) $\lim \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ ...\ \left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ d) $\lim \left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ ...\ +\frac{1}{n(n+1)}\right)$

e) $\lim \frac{1+2+...+n}{n^2+3n}$ f) $\lim \frac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}$

Bài 5: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)$ b) $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right)$ c) $\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)$

d) $\lim\left(1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}\right)$ e) $\lim\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)$ f) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$

g) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$ h) $\lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$ i) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}$

Bài 6: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{2\cos n^2}{n^2+1}$ b) $\lim\dfrac{(-1)^n\sin(3n+n^2)}{3n-1}$ c) $\lim\dfrac{2-2n\cos n}{3n+1}$

d) $\lim\dfrac{3\sin^6 n+5\cos^2(n+1)}{n^2+1}$ e) $\lim\dfrac{3\sin^2(n^3+2)+n^2}{2-3n^2}$ f) $\lim\dfrac{3n^2-2n+2}{n(3\cos n+2)}$

Bài 7: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, với ∀ n ≥ 2.

a) Rút gọn u_n. b) Tìm lim u_n.

Bài 8: a) Chứng minh: $\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ $(\forall n\in N^*)$.

b) Rút gọn: $u_n=\dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

c) Tìm lim u_n.

Bài 9: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{2^n}\ (n\ge 1)\end{cases}$.

a) Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n$. Tính $v_1+v_2+...+v_n$ theo n.
b) Tính u_n theo n.
c) Tìm lim u_n.

Bài 10: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=0;\ u_2=1\\ 2u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,\ (n\ge 1)\end{cases}$

a) Chứng minh rằng: $u_{n+1}=-\dfrac{1}{2}u_n+1$, ∀n ≥ 1.

b) Đặt $v_n=u_n-\dfrac{2}{3}$. Tính v_n theo n. Từ đó tìm lim u_n.

II. Giới hạn của hàm số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ *(c: hằng số)* ***2. Định lí:*** *a) Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ *thì:* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = L-M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right] = L.M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ *(nếu M ≠ 0)* *b) Nếu* $f(x) \ge 0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *thì* $L \ge 0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ *c) Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0}\left\|f(x)\right\| = \left\|L\right\|$ ***3. Giới hạn một bên:*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty \text{ nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{c}{x^k} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\|x\|} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\|x\|} = +\infty$ ***2. Định lí:*** *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \ne 0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ *thì:* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ cùng dấu} \\ -\infty \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ trái dấu} \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \quad \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty \text{ nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ và } L.g(x) > 0 \\ -\infty \text{ nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ và } L.g(x) < 0 \end{cases}$ ** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

Một số phương pháp khử dạng vô định:

1. Dạng $\dfrac{0}{0}$

a) $L = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***với P(x), Q(x) là các đa thức và*** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

VD: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2} = \dfrac{12}{4} = 3$

b) $L = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***với*** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ ***và P(x), Q(x) là các biểu thức chứa căn cùng bậc***

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

VD: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}} = \dfrac{1}{4}$

c) $L = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***với*** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ ***và P(x) là biêåu thức chứa căn không đồng bậc***

Giả sử: $P(x) = \sqrt[m]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$ *với* $\sqrt[m]{u(x_0)} = \sqrt[n]{v(x_0)} = a$.

Ta phân tích $P(x) = \left(\sqrt[m]{u(x)} - a\right) + \left(a - \sqrt[n]{v(x)}\right)$.

VD: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}+\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$$

2. Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$: $L=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với P(x), Q(x) là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.

– Nếu P(x), Q(x) là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x.
– Nếu P(x), Q(x) có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x hoặc nhân lượng liên hợp.

VD: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-1$

3. Dạng $\infty-\infty$: Giới hạn này thường có chứa căn

Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.

VD: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=0$

4. Dạng $0.\infty$:

Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

VD: $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0.\sqrt{2}}{2}=0$

Bài 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}$

Bài 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-2x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5x^5+4x^6}{(1-x)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$ i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^3+2x^2}$

Bài 3: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$. c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ h) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+\sqrt{3-2x}}{x^2+3x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$

Bài 4: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{2x^2-5x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt{1+6x}-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

Bài 5: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^3-3x^2+2}$

d) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$ e) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$ i) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$

Bài 6: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$

Bài 7: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-15}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1+3x-2x^2}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

Bài 8: Tìm các giới hạn một bên của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & khi\ x>0\\ \dfrac{3}{2} & khi\ x\le 0\end{cases}$ $tại\ x=0$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x-3} & khi\ x<3\\ 1-x & khi\ x\ge 3\end{cases}$ $tại\ x=3$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{8-x^3} & khi\ x>2 \\ \dfrac{x^4-16}{x-2} & khi\ x<2 \end{cases}$ $tại\ x=2$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & khi\ x>1 \\ -\dfrac{x}{2} & khi\ x\le 1 \end{cases}$ $tại\ x=1$

Bài 9: Tìm giá trị của ***m*** để các hàm số sau có giới hạn tại điểm được chỉ ra::

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & khi\ x<1 \\ mx+2 & khi\ x\ge 1 \end{cases}$ $tại\ x=1$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & khi\ x>1 \\ m^2x^2-3mx+3 & khi\ x\le 1 \end{cases}$ $tại\ x=1$

c) $f(x) = \begin{cases} x+m & khi\ x<0 \\ \dfrac{x^2+100x+3}{x+3} & khi\ x\ge 0 \end{cases}$ $tại\ x=0$ d) $f(x) = \begin{cases} x+3m & khi\ x<-1 \\ x^2+x+m+3 & khi\ x\ge -1 \end{cases}$ $tại\ x=-1$

III. Hàm số liên tục

1. Hàm số liên tục tại một điểm: *y = f(x) liên tục tại x_0* $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- *Để xét tính liên tục của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 ta thực hiện các bước:*

  B1: Tính $f(x_0)$.

  B2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp ta cần tính $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$)

  B3: So sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng: *y = f(x) liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.*

3. Hàm số liên tục trên một đoạn [a; b]*: y = f(x) liên tục trên (a; b) và*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

4. • *Hàm số đa thức liên tục trên R.*

• *Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.*

5. *Giả sử y = f(x), y = g(x) liên tục tại điểm x_0. Khi đó:*

- *Các hàm số y = f(x) + g(x), y = f(x) – g(x), y = f(x).g(x) liên tục tại x_0.*
- *Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.*

6. *Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì tồn tại ít nhất một số c ∈ (a; b): f(c) = 0.*

Nói cách khác: *Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm c∈ (a; b).*

Mở rộng: *Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b]. Đặt m = $\min\limits_{[a;b]} f(x)$, M = $\max\limits_{[a;b]} f(x)$. Khi đó với mọi T ∈ (m; M) luôn tồn tại ít nhất một số c ∈ (a; b): f(c) = T.*

Bài 1: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} & khi\ x \neq 1 \\ -1 & khi\ x = 1 \end{cases}$ *tại* $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & khi\ x \neq 1 \\ \dfrac{1}{4} & khi\ x = 1 \end{cases}$ *tại* $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & khi\ x \neq 2 \\ 1 & khi\ x = 2 \end{cases}$ *tại* $x = 2$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & khi\ x > 5 \\ (x-5)^2+3 & khi\ x \le 5 \end{cases}$ *tại* $x = 5$

e) $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & khi\ x \le 0 \\ \sqrt{x+1} & khi\ x > 0 \end{cases}$ *tại* $x = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & khi\ x < 1 \\ -2x & khi\ x \ge 1 \end{cases}$ *tại* $x = 1$

Bài 2: Tìm ***m, n*** để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & khi\ x < 1 \\ 2mx-3 & khi\ x \ge 1 \end{cases}$ *tại* $x = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x \neq 1 \\ 3x+m & khi\ x = 1 \end{cases}$ *tại* $x = 1$

c) $f(x)=\begin{cases} m & khi\ x=0 \\ \dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)} & khi\ x\neq 0, x\neq 3 \\ n & khi\ x=3 \end{cases}$ *tại* $x=0$ *và* $x=3$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2 \\ m & khi\ x=2 \end{cases}$ *tại* $x=2$

Bài 3: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x+2}{x^3+1} & khi\ x\neq -1 \\ \dfrac{4}{3} & khi\ x=-1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+4 & khi\ x<2 \\ 5 & khi\ x=2 \\ 2x+1 & khi\ x>2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\neq -2 \\ -4 & khi\ x=-2 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & khi\ x\neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & khi\ x=\sqrt{2} \end{cases}$

Bài 4: Tìm các giá trị của ***m*** để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2 \\ m & khi\ x=2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & khi\ x<1 \\ 2 & khi\ x=1 \\ mx+1 & khi\ x>1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x\neq 1 \\ 3x+m & khi\ x=1 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & khi\ x<1 \\ 2mx-3 & khi\ x\geq 1 \end{cases}$

Bài 5: Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3-3x+1=0$ b) $x^3+6x^2+9x+1=0$ c) $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$

Bài 6: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^5-3x+3=0$ b) $x^5+x-1=0$ c) $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$

Bài 7: Chứng minh rằng phương trình: $x^5-5x^3+4x-1=0$ có 5 nghiệm trên (–2; 2).

Bài 8: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

a) $m(x-1)^3(x-2)+2x-3=0$ b) $x^4+mx^2-2mx-2=0$

c) $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$ d) $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$

e) $\cos x+m\cos 2x=0$ f) $m(2\cos x-\sqrt{2})=2\sin 5x+1$

Bài 9: Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $ax^2+bx+c=0$ với 2a + 3b + 6c = 0 b) $ax^2+bx+c=0$ với a + 2b + 5c = 0

c) $x^3+ax^2+bx+c=0$

Bài 10: Chứng minh rằng phương trình: $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm x ∈ $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$ với a ≠ 0 và 2a + 6b + 19c = 0.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{1+2+3+...+n}{3n^3}$ b) $\lim \left(\frac{n+2}{n+1}+\frac{\sin n}{2^n}\right)$ c) $\lim \frac{n^2+2n}{3n^2+n+1}$

d) $\lim \frac{n^2+2n}{2n^2+3n-1}$ e) $\lim \frac{2^{5n+1}+3}{3^{5n+2}+1}$ f) $\lim \frac{(-1)^n+4.3^n}{(-1)^{n+1}-2.3^n}$

g) $\lim\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+1}\right)$ g) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)$ h) $\lim\left(1+n^2-\sqrt{n^4+n}\right)$

i) $\lim \frac{2\cos n^2}{n^2+1}$ k) $\lim \frac{n}{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}$ l) $\lim\left(\sqrt{n^2-2}-\sqrt[3]{n^3+2n}\right)$

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8x^2-1}{6x^2-5x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-4x^2+4x-3}{x^2-3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^4-5x^3+3x^2+1}{3x^4-8x^3+6x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{2x^2+5x+2}$ i) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+2)^2-1}{x^2-1}$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{3-\sqrt{x+7}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{x+3}-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ m) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}-5}{x-2}$

Bài 4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{2x^2-3x+2}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x^2+3x-4}$ c) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{3x^3-4x+1}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{2x^2-5x+2}{(x-2)^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3x+4}{3-x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}}$ h) $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{2x^2+5x-3}{(x-3)^2}$ i) $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^3-3x^2+4x-1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-1}{2x^2+x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(2x-3)^2(4x+7)^3}{(3x^3+1)(10x^2+9)}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{2x^4-x^3+x}{3x^4+2x^2-7}}$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x+\sqrt{x^2-x+1})$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{5+2x}$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-x+3}+x\right)$ i) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x+3\sqrt{1-x}}{1-x}$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$ l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2x^2-1}\right)$ m) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$

Bài 6. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x)=\begin{cases}1-x & khi\ \ x\le 3\\ \dfrac{x^2-2x-3}{2x-6} & khi\ \ x>3\end{cases}$ trên R b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & khi\ x\ne 0\\ \dfrac{1}{4} & khi\ x=0\end{cases}$ tại $x=0$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{12-6x}{x^2-7x+10} & khi\ x\ne 2\\ 2 & khi\ x=2\end{cases}$ trên R d) $f(x)=\begin{cases}x^2 & khi\ x<0\\ 1-\sqrt{x} & khi\ x\ge 0\end{cases}$ tại $x=0$

Bài 7. Tìm *a* để hàm số liên tục trên R:

a) $f(x)=\begin{cases}2a^2+1 & khi\ x\le 1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x>1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\ x\ne 1\\ x+a & khi\ x=1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x+2} & khi\ x\ne -2\\ a & khi\ x=-2\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & khi\ x<1\\ ax+2 & khi\ x\ge 1\end{cases}$

Bài 8. Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3+6x^2+9x+1=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

b) $m(x-1)^3(x^2-4)+x^4-3=0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm với mọi giá trị của *m*.

c) $(m^2+1)x^4-x^3-1=0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm nằm trong khoảng $\left(-1;\sqrt{2}\right)$ với mọi *m*.

d) $x^3+mx^2-1=0$ luôn có 1 nghiệm dương.

e) $x^4-3x^2+5x-6=0$ có nghiệm trong khoảng (1; 2).

Bài 9. Cho *m* > 0 và *a, b, c* là 3 số thực thoả mãn: $\dfrac{a}{m+2}+\dfrac{b}{m+1}+\dfrac{c}{m}=0$. Chứng minh rằng phương trình: $f(x)=ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0; 1).

HD: Xét 2 trường hợp c = 0; c ≠ 0. Với c ≠ 0 thì $f(0).f\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right)=-\dfrac{c^2}{m(m+2)}<0$

Bài 10.

a)